Cognición matemática y aprendizaje, basado en *Semiosis y pensamiento humano* de Raymond Duval (1995)

*Brenda Morales Rojas**

Resumen

Numerosas investigaciones se han realizado en el campo de la educación matemática en los últimos años, para tratar de entender la dificultad mundial que representa para los alumnos aprender matemáticas. Sin lugar a dudas, el tema es complejo. Nadie lo sabe mejor que los que estamos a diario en esa labor. Afortunadamente, nace en Francia hacia fines de los años '80, una nueva disciplina, una ciencia: "Didáctica de las Matemáticas". Ella se fundamenta en tres grandes pilares: la sicología, la epistemología y, naturalmente, la matemática. De estos pilares, me he interesado en la Cognición Matemática, puesto que para mi trabajo, conocer cada vez más sobre ella, es muy provechoso.

* Magíster en Enseñanza de las Ciencias, mención Didáctica Matemática, Universidad Católica de Valparaíso. Académica de la Escuela de Ingeniería, UCINF.

Introducción

Didáctica matemática es el estudio de la evolución de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con el objetivo de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto.
Guy Brousseau, 1986

Con la ciencia de la didáctica matemática aparece un nuevo lenguaje para quienes enseñamos esta disciplina, y una nueva mirada a qué enseñamos (el saber), a quién enseñamos (el alumno) y quién enseña (el profesor). Las interacciones de esta trilogía son, el motivo de estudio de esta nueva ciencia.

Me parece pertinente tomar de ella la cognición matemática para traspasar lo que he aprendido.

Sobre cognición mucho se ha dicho; se han determinado etapas de este proceso, estilos, categorías, etc. Sin embargo, sobre cognición matemática muy poco se ha escrito o investigado, al parecer, porque a diferencia de otras, esta cognición humana escapa de la realidad. Incluso, los sicólogos tienen numerosas investigaciones sobre lingüística, física y otros, pero no acerca del pensamiento matemático. La razón es bastante obvia: cuando estamos frente a un problema de aprendizaje en física, el alumno es capaz de imaginar la situación e incluso repetir el experimento en vivo si es necesario, porque lo puede hacer (es un fenómeno real). Cuando estamos frente a una dificultad de aprendizaje en historia, generalmente se refiere a falta de memoria o concentración o lectura fragmentaria en el alumno, pero no de un problema de comprensión, puesto que el hecho ocurrió y probablemente aún queden evidencias de ello. Pero ¿qué pasa cuando el alumno tiene dificultades para aprender, por ejemplo, las raíces (o funciones, o límites)?, ¿cómo y dónde puedo mostrarle este objeto matemático al alumno? Eso no es todo, aun sin que pueda verlo, hago que realice operatoria con este objeto, que aprenda propiedades de su funcionamiento, casi en un acto de fe. Imagine, por ejemplo, que el alumno arbitrariamente "inventa una propiedad" (cosa que ocurre frecuentemente), entonces, se le dice que ello está mal. ¿Cómo se le podría hacer ver su error, si lo que aprendió no existe?, es decir, existe en la matemática, pero no en "la vida diaria". ¿Por qué, entonces, estaría mal lo que contestó, si al igual que lo aprendido, ello tampoco existe? Tal es la temática que aborda este artículo.

1. Terminología usada en la Teoría de Duval

Todo avance científico necesariamente conlleva una terminología nueva.

- Objeto matemático: Signo, concepto que aparece en la actividad matemática y del que se conocen sus propiedades, operatoria, teoremas, etc. Como los números enteros, las funciones, los límites, los polinomios, las matrices, etc.
- Representaciones mentales: Aquellas que cubren el conjunto de imágenes y las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto.
- Representaciones semióticas: Aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.) que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias reglas y significancia. Es decir, el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Existen tres tipos de registros de representaciones semióticas: registro de la lengua natural, registro gráfico y registro algebraico.
- Semiótica: Ciencia de los modos de producción, funcionamiento y recepción de los diferentes sistemas de signos de comunicación en los individuos o colectividades. Teoría de los signos. Producción de una representación semiótica.
- Noesis: Acto cognitivo. Pensamiento. Aprehensión conceptual de un objeto.
- Tratamiento: Transformación de la representación al interior de un registro de representación o de un sistema. La paráfrasis es una transformación interna del registro del discurso en la lengua natural: "reformula" un enunciado en otro, ya sea para reemplazarlo o para explicarlo.
- Conversión: Transformación externa del registro de representación de partida. La ilustración es la puesta en correspondencia de una palabra, una frase o un enunciado, con una figura o con uno de sus elementos.
- Congruencia: La congruencia entre registros existe cuando se cumplen las siguientes condiciones:
  Correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas dos unidades

en las dos representaciones, transformación de una unidad significante en la representación de partida en una sola unidad significante en la representación de llegada.

2. Sobre la cognición matemática y el aprendizaje matemático

Una gran parte del pensar ocurre bajo el nivel de inconsciencia. No sabemos por qué mecanismos actuamos en ciertas ocasiones; por ejemplo, al hablar por celular algunas personas se mueven sin darse cuenta (caminan, mueven las manos, gesticulan como si estuvieran viendo a su receptor). Es decir, no tenemos acceso consciente a los mecanismos que usamos al realizar ciertas acciones o al pensar, porque son actos involuntarios, y, menos acceso tenemos aún de saber qué neuronas utilizamos al pensar. Aquellos están fuera del alcance de la introspección. En consecuencia, quienes enseñamos matemáticas, no podemos descubrir los mecanismos del pensamiento a través de la introspección, por eso las ciencias cognitivas se hacen necesarias.

Para tratar de comprender lo complejo del aprendizaje matemático, he seleccionado a Raymond Duval, creador de la Teoría de Representaciones Semióticas y a Guy Brousseau, creador de la Teoría de Situaciones Didácticas (Guzmán, 2002).

Duval ha escrito: *El aprendizaje matemático constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la contextualización, el razonamiento, la resolución de problemas e incluso, la comprensión de textos. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintas a los del lenguaje natural o de las imágenes: variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escritura algebraica y lógica que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.* (Duval, 1999)

También dice el autor: "Un objeto matemático ha sido aprehendido por el alumno, si puede conocer y trabajar las transformaciones de este, en al menos dos registros de representación semiótica". En otras palabras, Duval nos está haciendo ver que, como el objeto matemático no es real (no existe), hay que darle al alumno varias formas de representación semiótica, para que lo conozca desde múltiples perspectivas, o sea, rodear al objeto sistémicamente y, así, lograr la comprensión de ese objeto por parte del estudiante.

Por otra parte, nosotros los académicos nunca debemos perder de vista que para dar cuenta de un objeto matemático, necesitamos de un significante (semiosis) y de un significado (noesis). En la escritura de un número, es necesario diferenciar entre la significación operatoria vinculada al significante y el número representado. Por ejemplo, la significación operatoria no es la misma para 0,25; para 1/4 y para 25×10^{-2}, puesto que no son los mismos procedimientos de tratamiento los que permiten efectuar las siguientes tres adiciones:

1. $0,25 + 0,25 = 0,5$
2. $1/4 + 1/4 = 1/2$
3. $25 \times 10^{-2} + 25 \times 10^{-2} = 50 \times 10^{-2}$

Cada uno de estos tres significantes: 0,25; 1/4; 25×10^{-2}, tienen una significación operatoria diferente y, sin embargo, representan el mismo número. Además, los tres significantes corresponden a un mismo registro de representación, el algebraico, pero con distinto tratamiento: 0,25 en notación decimal, 1/4 en notación racional (o fraccionaria) y, 25×10^{-2}, en notación científica (o exponencial).

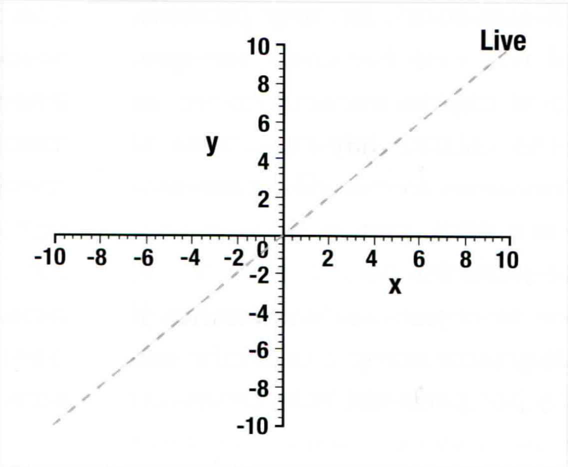
La congruencia entre los registros de representación, juega también un papel importante en la comprensión de un objeto matemático. Duval señala: "En la noesis, la congruencia entre los registros de entrada y de salida es muy decisiva. El pasaje de una representación a otra, se hace de manera espontánea cuando existe congruencia. Analicemos el siguiente caso:

La expresión "x = y" (Figura 1) es una representación algebraica que puede convertirse a una representación gráfica-cartesiana. Esta regla de codificación no es suficiente para cambiar de registro. Ella permite marcar tantos puntos como se quiera en el gráfico, pero no hacer el trazo continuo de una recta (Figura 2).

Figura 1: Registro algebraico

"x = y"

Figura 2: Registro gráfico



Esta conversión es congruente; sin embargo, ya no lo es en la conversión inversa (en el traspaso de la representación gráfica a la algebraica).

Otro ejemplo, donde notoriamente se presenta la no-congruencia, es en los cuantificadores (Tabla 1).

Tabla 1: Cuadro que muestra la no-congruencia en cuantificadores

Escritura algebraica	Lectura que mezcla los dos registros	Lengua natural
$\forall$ x $\exists$ y (Axy)	Cualquiera que sea x, existe al menos un y tal que, x ama a y.	Todo el mundo ama a alguien.
$\forall$ y $\exists$ x (Axy)	Cualquiera que sea y, existe al menos un x tal que, x ama a y.	Todo el mundo es amado por alguien.
$\exists$ x $\forall$ y (Axy)	Existe al menos un x tal que, para todo y, x ama a y.	Hay alguien que ama a todo el mundo.
$\exists$ y $\forall$ x (Axy)	Existe al menos un y tal que, para todo x, x ama a y.	Hay alguien a quien todo el mundo ama.

La situación se ve bastante complicada, debido a que los objetos matemáticos no existen en la realidad. Esto no significa que las matemáticas no sirvan, o que no constituyan una ciencia humana. Entre otras cosas, la matemática saca sus modelos (de primera generación) de la vida real, lo que los ingenieros llaman modelación y, los traspasa a códigos y signos en los que puede trabajar y estudiar, entonces, resuelve y vuelve a la vida real con la solución. Así, de ella se alimentan muchas y diversas disciplinas, tales como: la arquitectura y construcción, que se nutren de la geometría y la trigonometría; la música, que utiliza los números naturales para los tiempos de las notas, las armonías, etc.; la física, que también devuelve los modelos matemáticos (estructuras matemáticas) a la vida cotidiana; y de igual forma ocurre con la astronomía, la informática, la ecología, etc.

Como vemos, variados y diversos son los factores que inciden en la dificultad intrínseca del aprendizaje matemático, en todos los niveles de la enseñanza: escolar y universitaria. Adicionalmente a lo expuesto, existen otros obstáculos para el alumno como, por ejemplo, que a veces nosotros, los encargados de enseñar, ponemos demasiado énfasis en la algoritmización de los conceptos matemáticos (la mecánica, que el alumno olvida rápidamente), y no en la comprensión de estos. No recuerdo haber escuchado a alumno alguno expresar que la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas, corresponda a encontrar en R^2, el punto de intersección (x,y) de dos rectas, que en el mejor de los casos se cortan (Figura 3), pero que asimismo existen otras alternativas de solución. Por ejemplo, que sean rectas paralelas (Figura 4), por lo tanto, nunca se cortan, en cuyo caso, el sistema de ecuaciones tendría solución vacía (ø); o que se trate de la misma recta, una sobre la otra (Figura 5), en cuyo caso todos los puntos coinciden y, por lo tanto, la solución estaría representada por todos los números reales (R).

Figura 3: Sistema de ecuaciones lineales con rectas que se intersectan

Representación algebraica:

$$\begin{array}{rcrcr|} 2x & - & 3y & = & -4 \\ x & + & 2y & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Solución} = \left\{ \frac{1}{7} , \frac{10}{7} \right\}$$

Representación gráfica:

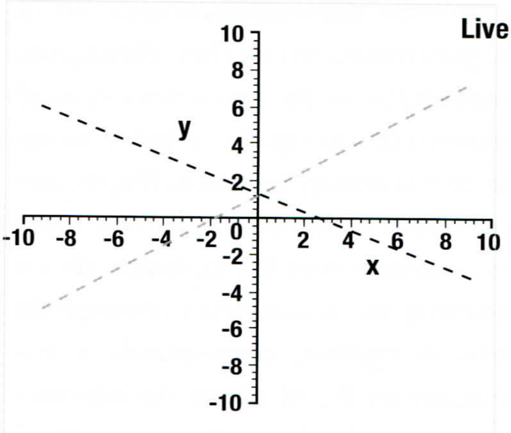


Figura 4: Sistema de ecuaciones lineales con rectas paralelas:

Representación algebraica:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -2 \\ -17x & - & 17y & = & 7 \end{array}\right|$$

Solución = ∅

Representación gráfica:

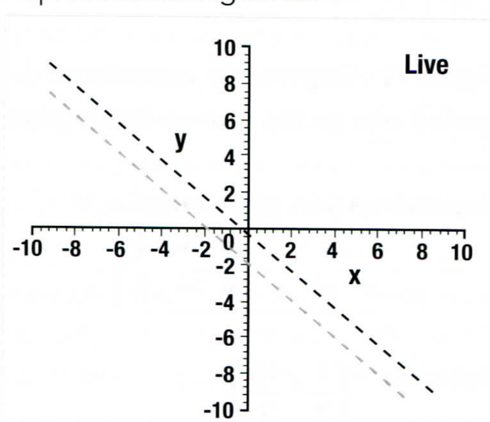


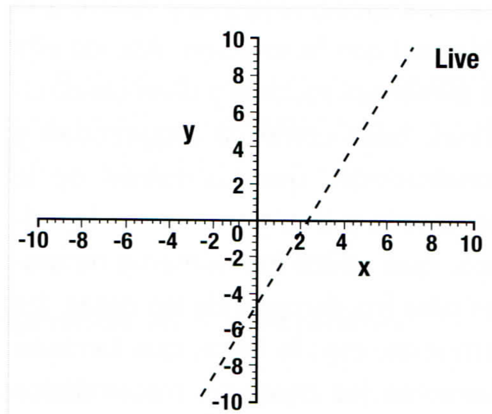
Figura 5: Sistema de ecuaciones lineales con rectas una sobre la otra:

Representación algebraica:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 5 \\ 4x & - & 2y & = & 10 \end{array}\right|$$

Solución = $\mathfrak{R}$

Representación gráfica:



No menos importante es el hecho de que los tiempos de enseñanza y los tiempos de aprendizaje, generalmente no corresponden. Así, cuando el alumno está en vías de aprehender un concepto del contenido del programa de la asignatura que cursa, el profesor ya ha pasado varios contenidos más previamente y no se detiene, pues el tiempo es lo único que no le sobra para abordar todo el programa de la asignatura que dicta.

La heurística es un arte y, como tal, es libre. Lo más importante de ella es que un alumno en la resolución de un problema tiene la posibilidad de adivinar, tantear, rechazar pistas falsas, inventar, descubrir, etc. Los alumnos que han cursado talleres heurísticos, mayoritariamente tienen éxito en la resolución de problemas. En las clases de esta materia, se les presenta una actividad que generalmente resuelven en grupo, pasando por las cuatro etapas de la Teoría de situaciones didácticas de Brousseau (Guzmán, 1999), que son: acción, formulación, validación o justificación e institucionalización. A través de ellas, el alumno primero "juega" o discute la actividad con su grupo (fase de acción), luego elabora en grupo algunas hipótesis sobre la resolución (fase de formulación), enseguida, un representante de cada grupo expone sus hipótesis frente a los demás grupos, debiendo demostrar a sus pares que sus hipótesis son correctas (fase de validación). Tras estas tres fases, sigue necesariamente la fase de institucionalización por parte del profesor, que es cuando este da a conocer a los alumnos las convenciones internacionales y la debida formalidad matemática relativa al objeto matemático que los alumnos han estado descubriendo.

Mas, no todos los objetos matemáticos pueden ser tratados heurísticamente, debido a dos razones fundamentales: el concepto mismo (que no se presta) y el tiempo requerido. Por otra parte, con la heurística es también posible evaluar objetivos transversales, como el grado de solidaridad, compañerismo, egoísmo, flojera, respeto, participación.

Naturalmente, este tipo de talleres no debe ser calificado, puesto que la dinámica consiste en que los alumnos se puedan equivocar y en el debate abierto con sus pares, puedan darse cuenta de su error.

El alumno pasa por varias etapas ante un conocimiento nuevo: primero está en equilibrio con los conocimientos que tiene; luego, se le propone una actividad para que entre en conflicto con sus conocimientos anteriores (por ejemplo, que le sean insuficientes), esto le produce un desequilibrio, y, finalmente, cuando el alumno adquiere el nuevo conocimiento, otra vez vuelve al equilibrio (Johansen, 2002). Un ejemplo de esto es la aparición de los números complejos. Hasta antes de ello, el alumno sabía que cuando en la resolución de una ecuación de segundo grado el resultado era una raíz con el subradical negativo ($\sqrt{-9}$), la ecuación no tenía solución; sin embargo, después de conocer a los complejos, la ecuación sí tiene solución.

Conclusiones

La cognición matemática es muy compleja, ya que se trata de un proceso en el cual se entra, pero es imposible saber exactamente a través de qué neurona precisa va el objeto matemático deseable de transformar en conocimiento permanente para el alumno. Por lo tanto, para suplir esta información, como enseñante (profesor) de cualquier nivel, debo tratar de aminorar las confusiones y los aprendizajes no logrados por parte de los alumnos.

A continuación, propongo algunas consideraciones importantes que se desprenden del texto:

- El alumno debe conocer e interrelacionar los objetos matemáticos (conceptos), a través de más de un registro de representación semiótica (Guzmán, 2002; Moreau, 2002).
- Considerar lo ambiguo que resulta para el alumno la no-congruencia en la conversión de registros de representación, sobre todo, el traspaso del registro de lenguaje natural a otro registro, puesto que el idioma se aprende desde siempre y las matemáticas no. Debemos, entonces, introducir poco a poco al alumno en este nuevo lenguaje (Guzmán, 2002; Moreau, 2002).
- Mostrar al alumno, la aplicabilidad de los conceptos matemáticos, a través de problemas que tengan significación para él.
- Recordar que, de acuerdo a las palabras de Guy Brosseau: "un problema es nuevo para el alumno, si, en cuanto a su base de conocimientos, no lo sabe" (Guzmán, 2002). Por lo tanto, un ejercicio de repetición, no constituye un problema.
- Considerar que los tiempos de enseñanza y de aprendizaje no son los mismos: cada alumno posee su propio ritmo de aprendizaje, el cual debe ser respetado, según nos recuerda Brousseau (Guzmán, 2002).
- "Dar, de vez en cuando, cabida a la heurística, al debate, a escuchar a los alumnos, etc." (Guzmán, 2002).

- Es necesario tener siempre presente que la matemática es una ciencia donde se aprende a sobrepasar a la memorización (Guzmán, 2002). "El razonamiento en matemáticas, debe llegar a ser una segunda memoria", declara Evaristo Galois (Guzmán, 2002).
- Por último, nunca debemos olvidar que:
  - el profesor aprendió antes y el alumno está aprendiendo,
  - el profesor estuvo en la universidad y el alumno está todavía en formación,
  - el profesor tiene más años, más vida, está formado, etc. (Guzmán, 2002)

Bibliografía

DUVAL, RAYMOND. *Semiosis y pensamiento humano.* Cali: Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, 1999.

———. "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento." *Revista Investigaciones en Matemática Educativa II.* Madrid: Grupo Editorial Iberoamericana, 1999.

GUZMÁN R, ISMENIA. Apuntes de clases de los cursos: "Didáctica experimental de las matemáticas", "Fundamentos de la didáctica matemática" y "Transposición didáctica". Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2002.

JOHANSEN B., ÓSCAR. "Teoría de la información". Conferencia dictada en Santiago, 2002.

MOREAU, ERICK . Apuntes de clases de los cursos: "Ciencias cognitivas I y II", Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2001-2002.