

GONZALO HERNÁNDEZ OLIVA \* \*\*

## RESUMEN

Los modelos de interacción local son sistemas dinámicos compuestos por gran cantidad de elementos o subsistemas de comportamiento análogo, que interactúan vía reglas de evolución deterministas o estocásticas. Existen numerosos ejemplos de estos sistemas en Matemáticas, Física, Biología, Química y Ciencias de la Ingeniería, en los cuales su evolución temporal genera un comportamiento global de alta complejidad analítica. Se pueden apreciar las siguientes características: régimen transiente y estacionario de largo exponencial o no-polinomial; existencia de una gran variedad de atractores de la dinámica; invarianza de escalas, auto-organización y auto-similaridad; y evolución de visualización compleja. Dada su complejidad analítica y también como una forma de refinamiento y ajuste de estos modelos a la realidad, se debe realizar un estudio numérico a través de simulaciones computacionales de gran escala, que involucran un uso intensivo de los recursos computacionales. Es por esta razón, que en los últimos 20 años se han incorporado técnicas de procesamiento paralelo, que utilizan supercomputadores de arquitecturas paralelas masivas, como también redes de computadores que emulan máquinas de arquitectura distribuida. En este contexto, presentamos resultados numéricos y visualizaciones obtenidos de simulaciones paralelas y distribuidas de gran tamaño del modelo de Olami-Feder-Christiansen. Este sistema dinámico es un autómata celular bidimensional, continuo en espacio y discreto en tiempo definido para simular actividad sísmica. Para este modelo determinamos el exponente de la ley de potencia de avalanchas y el camino hacia la auto-organización y auto-similaridad mediante la visualización del histograma de actualizaciones de cada elemento.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los modelos o sistemas de interacción local corresponden a sistemas dinámicos a tiempo y variable de estado discretos o continuos, compuestos por gran cantidad de elementos o subsistemas de comportamiento análogo, que interactúan con otros elementos vía reglas de evolución (llamadas reglas de transición local) deterministas o estocásticas. Su definición, en su forma más simple es la siguiente:

- $n$  : Número finito de elementos que componen el sistema
- $Q$  : Conjunto de estados posibles para cada elemento
- $G=(V,E)$  Grafo que define las interrelaciones entre los elementos.
- $V_j \subseteq V$  : Conjunto de vecinos que interactúan con el elemento  $i$
- $f_i : Q^V \rightarrow Q$  Función de evolución local del nodo  $i$ .

\* Ingeniero Civil en Matemáticas, PhD. Ciencias de la Ingeniería, U. de Chile.

\*\* Director Escuela de Ingeniería, UCINF.

\*\*\* Este trabajo fue parcialmente financiado por el Proyecto de Investigación Fondecyt 199-1026, y fue realizado en cooperación con el Departamento de Informática de la Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.

En base a lo anterior, se define la dinámica discreta paralela del sistema de interacción local como:

$$x(0) \in Q^n$$

$$x_i(t+1) = f_i ( x_j(t) ; j \in V_i ) \quad \forall i=1, \dots, n$$

Existen numerosos ejemplos de estos sistemas en Matemáticas, Física, Biología, Química y Ciencias de la Ingeniería (por ejemplo: Modelos de Magnetización de Ising y Potts, Vidrios de Spin, Gases Discretos, Pilas de Arena, Modelos de Actividad Sísmica, Redes Neuronales, etc), en los cuales su evolución local genera un comportamiento global de alta complejidad analítica, (Bak et al. 1988; Bak y Tank, 1989; Berkelamp et al. 1985; Bienenstock, 1986; Fogelman-Soulie et al. 1987; Goles y Martínez, 1990; Hopfield, 1982; Kauffman, 1984; Maneville et al 1990; Vichniac. 1984; Wolfram, 1986).

En todos estos ejemplos se pueden apreciar las siguientes características:

- Auto-similaridad y Auto-organización
- Régimen transiente y estacionario de largo exponencial o no-polinomial
- Existencia de una gran variedad de atractores de la dinámica
- Evolución de visualización compleja
- Invarianza de escalas
- Existencia de vehículos y barreras que permiten simular, mediante una codificación adecuada, un circuito lógico cualquiera.

Dada la complejidad de estos sistemas dinámicos no lineales y los avances en tecnologías computacionales, el estudio numérico de los sistemas, a través de simulaciones de gran escala, aparece como una herramienta esencial y complementaria para el refinamiento y ajuste de estos modelos a la realidad, como también para la etapa de verificación y validación del proceso de modelación, (Hernández y Herrmann, 1995; Hernández, 1998 y 2001; Pennington, 1995; Rumelhart y Clelland, 1986). Estas simulaciones de gran escala involucran un uso intensivo de los recursos computacionales. Por esta razón, en los últimos 20 años se han incorporado técnicas de procesamiento paralelo que utilizan supercomputadores de arquitecturas masivas paralelas, con administración de

memoria compartida (SM) o distribuida (DM) y con programación de tipo de datos paralelos o flujo de control, (Berguelin y Dongarra, 1994), Hwang (1993), MPI Forum (1994), Pennington (1995), Rumelhart y Clelland (1986). El altísimo costo de estos supercomputadores ha llevado a la utilización de redes de computadores que emulan estas máquinas de arquitectura distribuida, denominados máquinas paralelas virtuales o redes heterogéneas de procesamiento, que corresponden a múltiples procesadores de alto rendimiento, de distintas arquitecturas y sistemas operativos, conectados vía enlaces de alta velocidad y administradas por software de dominio público de procesamiento paralelo, por ejemplo PVM y MPI, (Berguelin y Dongarra, 1994; MPI Forum, 1994; Pennington, 1995; PVM, 1993). Por ejemplo, (Hernández, 1998 y 2001) se presenta el estudio numérico a través de simulaciones de gran escala de un modelo simple de proceso de fragmentación discreto en 2 y 3 dimensiones. Estas simulaciones fueron implementadas en redes de estaciones de trabajo SUN y las aplicaciones fueron programadas en lenguaje C, utilizándose procesamiento paralelo en base al software PVM.

En este contexto, presentamos resultados numéricos y visualizaciones obtenidos de simulaciones paralelas y distribuidas de gran tamaño del modelo de actividad sísmica de Olami-Feder-Christiansen, que corresponde a un autómata celular bidimensional, continuo en espacio y discreto en tiempo definido para simular actividad sísmica. Para este modelo determinamos el exponente de la ley de potencia de avalanchas y el camino hacia la auto-organización y auto-similaridad mediante la visualización del histograma de actualizaciones de cada elemento.

En 1956 Gutenberg y Richter determinaron experimentalmente que la frecuencia  $F$  de temblores de magnitud  $M > m$  está dada por:

$$\log F ( M > m ) = a - bm \quad (1)$$

El parámetro  $b$  tiene un rango de valores amplios que dependen de la falla específica. Para temblores de pequeña magnitud  $b \in [0.80, 1.06]$  mientras que para los de mayor magnitud

$b \in [1.23, 1.54]$ , (Pacheco, 1980). Esta ecuación es conocida como la Ley de Gutenberg – Richter. Por otra parte, la energía  $E$  liberada durante un temblor, tiene un comportamiento dado por:

$$\log E (M > m) = a - bm \quad (2)$$

donde  $d = 1$  y  $d = 3/2$  para pequeños y grandes temblores, respectivamente, (Ekstrom y Dziewonsky, 1987).

Combinando estas ecuaciones, tenemos que:

$$\log E (M > m) = c + dm \quad (3)$$

Este comportamiento de ley de potencia ha sido observado en una serie de fenómenos geológicos y geofísicos, por ejemplo: Procesos de Fragmentación, Modelo de Pilas de Arena, Fenómenos de Percolación, Avalanchas de Tierra, (Bak et al. 1988; Bak y Tank 1989; Christensen y Olami, 1992; Olami, Feder y Christensen. 1992; Hernández y Herrmann, 1995; Hernández, 1998 y 2001; Kauffman, 1984; Maneville et al. 1990; Vichniac, 1984). Se cree que la presencia de esta ley de potencia genera comportamiento dinámico de alta complejidad: estados críticos múltiples, auto-organización y auto-similaridad, multifractalidad, etc.

A continuación definiremos el modelo de actividad sísmica de Olami-Feder-Christensen (OFC) y presentaremos los resultados numéricos de nuestro estudio.

## 2. DEFINICIÓN DEL MODELO OFC.

El modelo OFC, (Christensen y Olami, 1992), (Olami, Feder y Christensen, 1992), es un arreglo bi-dimensional de bloques conectados por resortes elásticos de constante elástica  $k_h$  a sus 4 vecinos más cercanos; a una placa rígida en movimiento por otro resorte de constante elástica  $k_p$  y a una segunda placa rígida mediante interacción friccional. Un esquema de este modelo se muestra en la figura 1.

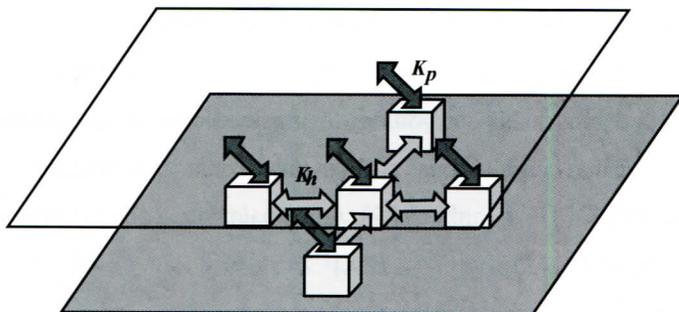


Figura 1: Esquema del Modelo OFC

El modelo OFC fue definido como una generalización del modelo uni-dimensional de Burridge y Knopoff (1967).

En cada bloque  $(i,j)$ , la fuerza total  $F_{ij}$  satisface la ecuación:

$$F_{i,j} = k_h (4dx_{ij} - dx_{i-1j} - dx_{i+1j} - dx_{ij-1} - dx_{ij+1}) + k_p dx_{ij} \quad (4)$$

donde  $dx_{ij}$  es el desplazamiento del bloque  $(i,j)$  de su posición de equilibrio, (Christiensen y Olami, 1992; Olami, Feder y Christiensen, 1992).

La dinámica de este autómata celular está definida como sigue: Si al instante  $t > 0$ , la fuerza  $F_{i,j}(t)$  que actúa sobre el bloque  $(i,j)$  es mayor que la fuerza máxima de fricción estática  $F_{msf}$ , el bloque se desliza hacia su posición de equilibrio y las fuerzas en su vecindad varían según:

$$F_{i,j}(t+1) = 0 \quad (5)$$

$$F_{i,l,j1}(t+1) = F_{i,l,j1}(t) + F_{i,j}(t)$$

donde  $a = k_h / (4k_h + k_p)$ . Este parámetro varía en  $(0, 1/4]$  y  $a = 1/4$  si y sólo si el sistema es

conservativo.

Por lo tanto, la dinámica es generada desde una condición inicial aleatoria de equilibrio y forzada a continuar mediante perturbaciones globales, tales como las definidas para modelo de pilas de arena, (Bak et al. 1988; Bak y Tank, 1989). Adicionalmente, consideraremos condiciones de borde fijas:

$$F|_{\partial Lattice}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (6)$$

Para este modelo estamos interesados en medir: (Christiensen y Olami, 1992; Olami, Feder y Christiensen, 1992; Hernández, 1998 y 2001)

- **Estado Crítico:** Corresponde al estado del sistema después de un gran número de perturbaciones globales que, a su vez, se define como la suma en cada bloque de la fuerza necesaria para producir la dinámica dada por la ecuación (5) :

$$F_{ij}(t) = F_{ij}(t) + [F_{msf} - F_{max}(t)] \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (7)$$

- **Tamaño de una avalancha:** Se define como el número total de sitios activados después de haber realizado una perturbación global. Para esta cantidad, estamos interesados en su distribución de probabilidad, debido a que la interpretaremos como la distribución de la energía liberada durante un temblor.

- **Actividad de cada Bloque:** Una vez que el estado crítico se ha alcanzado, mediremos el número de veces que cada bloque ha estado activado debido a perturbaciones globales. La actividad de cada bloque la definiremos, entonces, como esta cantidad normalizada por el número total de activaciones.

· Camino hacia la Auto-organización y la Auto-similaridad: A través de imágenes del patrón de activación de los bloques, determinaremos algún camino de transición entre el desorden y el orden y hacia un comportamiento de auto-organización y auto-similaridad.

### 3. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES Y VISUALIZACIONES DE GRAN ESCALA.

Dada la complejidad analítica del modelo OFC, sólo es posible estudiarlo numéricamente. Implementaremos este estudio mediante simulaciones paralelas y distribuidas de gran tamaño que disminuyen el efecto de tamaño finito y permiten una mejor calidad de resultados y comprensión. Específicamente, en nuestro caso estas simulaciones fueron en una pequeña red de computadores personales, ver **figura 2**, conectados por enlaces de alta velocidad y protocolos fast-ethernet, bajo el sistema operativo Linux. Los programas paralelos y distribuidos fueron construidos utilizando PVM y un modelo de programación maestro-esclavo, (Berguelin y Dongarra, 1994; MPI Forum, 1994; Pennington, 1995; PVM, 1993).

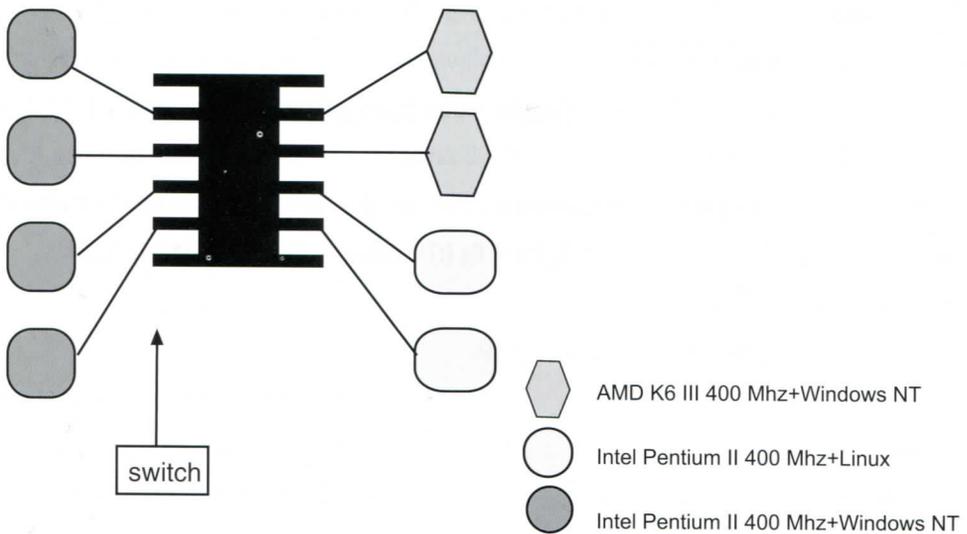


Figura 2. Red Heterogénea de computadores utilizada para las simulaciones

El algoritmo de las simulaciones es el siguiente:

Etapa 0: Escoger

$N$  Tamaño lineal del sistema

en  $(0, 1/4]$

$F_{msf}$  Fricción Estática Máxima

$n_c$  Número total de condiciones iniciales

$n_g$  Número total de perturbaciones globales

Etapa 1: Si el número de condiciones iniciales es  $\leq n_c$  generar una condición inicial aleatoria para la fuerza de los bloques, i.e.:

$F_{ij}(0)$  en  $[0, 1]$  con probabilidad  $\sim U(0, F_{msf})$

$F(0) | \partial \text{Lattice}(t) = 0$

$0 \leftarrow t$

En otro caso **STOP**

Etapa 2:

Calcular:

$$F_{\max}(t) = \max_{\text{Lattice}} F_{ij}(t)$$

Si el número de perturbaciones globales es  $< n_g$  realizar una perturbación global:

$$F_{ij}(t) \leftarrow F_{ij}(t) + [F_{msf} - F_{\max}(t)] \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

En otro caso ir a la etapa 0.

Etapa 3:

Mientras  $(i,j)$  tal que  $F_{ij}(t) > F_{msf}$

$$F_{ij}(t) \leftarrow 0$$

$$F_{i+1,j+1}(t+1) = F_{i+1,j+1}(t) + \alpha F_{i,j}(t)$$

$t \rightarrow t + 1$  e ir a la etapa 2.

El esquema anterior fue aplicado con un tamaño lineal del sistema igual a  $N = 128$  y  $256$ , y para una serie de valores de los parámetros  $\alpha$  y  $F_{msf}$ . Cada producción de las simulaciones fue realizada para  $n_c = 1000$  y  $n_g = 100000$ .

Presentamos a continuación nuestros resultados numéricos para  $N=256$ .

### 3.1. Estado Crítico:

Puede ser observada una estructura compleja del estado final junto con un aumento de los valores finales de  $F_{ij}(t)$  (colores grises claros) a medida que el parámetro  $\alpha$  aumenta hacia su valor máximo, dado que para  $\alpha = 0.25$  la contribución de fuerzas en cada vecindad del nodo con un valor mayor que  $F_{msf}$  también aumenta, ver figuras 3 y 4.

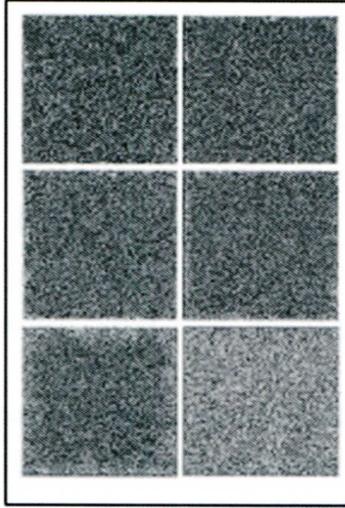


Figura 3. Estado Crítico para  $\alpha = 0.20, 0.21, 0.22, 0.23, 0.24$  y  $0.25$  y  $F_{msf} = 1.0$   
 (desde la figura en la izquierda superior a la de abajo a la derecha)

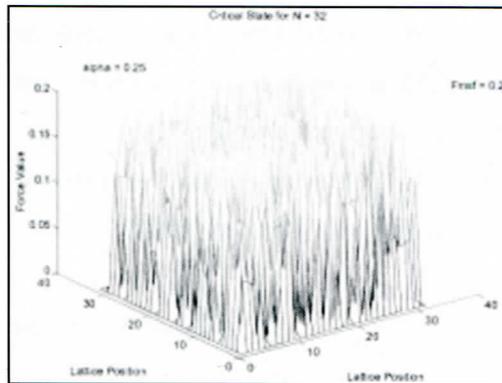


Figura 4. Estado Crítico para  $N=32$ ,  $\alpha = 0.25$  y  $F_{msf} = 0.20$

### 3.2. Tamaño de la Avalancha:

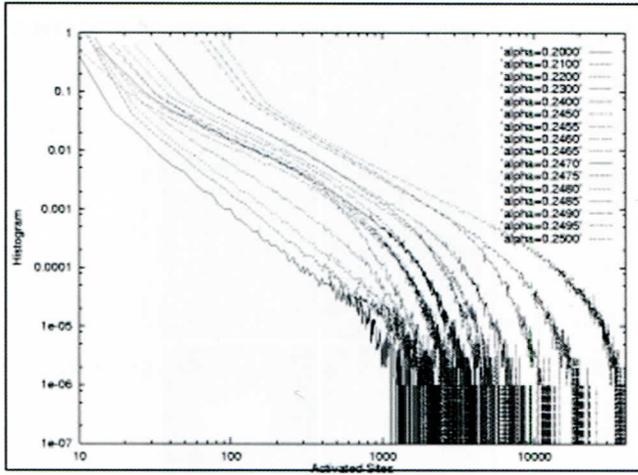


Figura 5. Histograma del tamaño de la avalancha para diferentes valores del parámetro  $\alpha$ .

Del histograma del tamaño de la avalancha podemos observar un comportamiento de ley de potencia:

$$\text{Frecuencia de la Avalancha} \sim (\text{Tamaño de la Avalancha})^{-\beta} \quad (8)$$

donde el exponente  $\beta$  es aproximadamente:

$$\beta = 1.6 + 0.2 \quad (9)$$

Si el tamaño de la avalancha se interpreta como la energía generada durante un temblor, podemos concluir que el modelo OFC reproduce el comportamiento cuantitativo y cualitativo predicho por la ley de Gutenberg-Richter.

### 3.3. Actividad de cada Bloque:

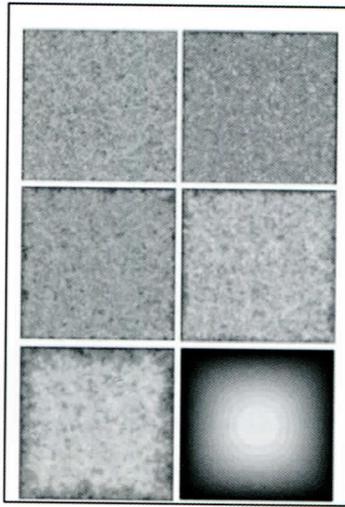


Fig. 6. Actividad de cada Bloque para diferentes valores del parámetro  $\alpha$  y  $F_{msf} = 0.5$   
(De la figura en la izquierda superior  $\alpha = 0.20$  a la de abajo a la derecha  $\alpha = 0.25$ )

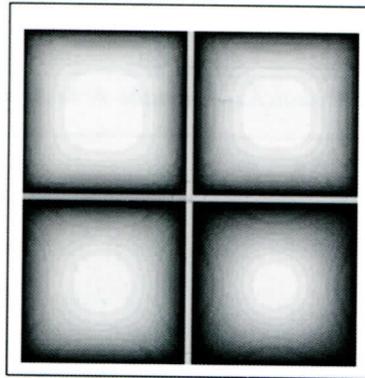


Figura 7. Actividad de cada Bloque para diferentes valores del parámetro  $\alpha$  y  $F_{msf} = 1.0$   
(De la figura en la izquierda superior  $\alpha = 0.22$  a la de abajo a la derecha  $\alpha = 0.25$ )

Los píxeles más claros representan bloques más activos. De estas figuras podemos concluir una gran similitud con los modelos de pilas de arena, (Bak et al. 1988; Bak y Tank, 1989). En la figura 7 hay una transición de fase de la actividad de cada bloque para  $\alpha \in [0.24, 0.25]$ . Para  $\alpha = 0.25$  o cerca tenemos  $k_p = 0$ , lo que implica que no existe interacción de los bloques con la placa que se mueve y la dinámica depende sólo de sus 4 vecinos. Debido a que la constante elástica de los  $k_h$  es igual para todos sus vecinos, se obtiene este comportamiento simétrico. Puede observarse, también, que la alta actividad simétrica aparece para diferentes valores de los parámetros  $F_{msf}$  y  $\alpha$ .

En la figura 7, esta actividad simétrica de los bloques produce una forma plana a la "cima de la montaña" mayor para mayores valores del parámetro debido a que  $k_p \neq 0$ .

### 3.4. Camino a la Auto-Organización y la Auto-Similaridad

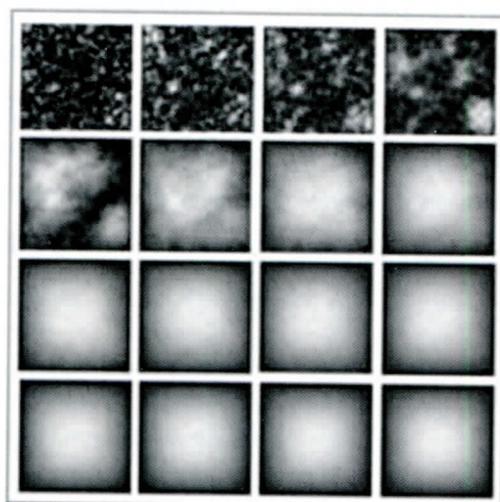


Figura 8. Camino a la Auto-Organización y Auto-Similaridad ( $N = 128$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $F_{msf} = 1.0$ )

En la figura 8 podemos observar el camino a la auto-organización y auto-similaridad para  $N = 128$ ,  $\alpha = 0.25$  and  $F_{msf} = 1.0$ . Este camino crítico corresponde a la imagen de frecuencia de activación de los bloques después de un gran número de perturbaciones. Específicamente, la imagen

superior de la izquierda se obtiene para  $n_g = 1000$  perturbaciones globales, la imagen siguiente para  $n_g = 1500$  perturbaciones globales y así sucesivamente. Finalmente, la imagen de abajo a la derecha se obtuvo para  $n_g = 20000$  perturbaciones globales. De las visualizaciones podemos observar y concluir la propiedad de auto-organización y auto-similaridad del sistema. Para un número pequeño de perturbaciones globales, el sistema presenta un comportamiento aleatorio pero, a medida que aumentamos las perturbaciones globales, el sistema se organiza gradualmente en un estado crítico específico que permanece inalterado para más perturbaciones globales. La dinámica entonces converge a un estado auto-organizativo y auto-similar.

#### 4. CONCLUSIONES

Los resultados numéricos y visualizaciones, obtenidos mediante simulaciones paralelas y distribuidas de gran tamaño, nos permiten mostrar con mayor precisión que el modelo OFC reproduce el comportamiento cuantitativo y cualitativo predicho por la ley de Gutenberg-Richter. Más aún, presenta comportamiento simétrico para la actividad de cada bloque y la propiedad de auto-organización y auto-similaridad como otros modelos de autómatas celulares, como por ejemplo, pilas de arena y modelos de autómatas de fuegos de bosques. Podemos concluir, entonces, que sistemas complejos reales, como por ejemplo sistemas de actividad sísmica, pueden ser estudiados mediante autómatas celulares.

## BIBLIOGRAFÍA.

Bak, P., Tang, C. and Wiesenfeld K., (1988). "Self Organized Criticality", *Physical Review A*, Vol. 38, N° 1, July 1..

Bak, P. and Tang, C. (1989). "Earthquakes as a self-organized critical phenomena", *Journal of Geophysical Research*, vol. 94, n° b11,

Berguelin, A.; Dongarra,J.J. et al, (1994). *PVM: A User Guide to Parallel Virtual Machine*. MIT Press,

Berkelamp, E.R., Conway, J.H. and Guy, R.K. (1985). *Winning Ways*, Academic Press,

Bienenstock, E., F. Fogelman-Soulie, G. Weisbuch, eds. (1986), *Disorderer Systems and Biological Organization*, NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences, 20,

Burridge, R. and Knopoff, L. (1967). "Model and theoretical seismicity", *Bulletin of Seismological Society of America*, vol. 57, n° 3,

Christiensen, K. and Olami, Z. (1992). "Scaling, Phase Transitions and Non-Universality in a Self-Organized Critical Cellular-Automaton Model", *Physical Review A*, vol. 46, n° 4,

Ekstrom, G., and. Dzewonsky, A.M (1988). *Nature*, Vol. 332, pp. 319, 1988.

Fogelman-Soulie, F., Robert, Y., Tchuente, M., eds. (1987). *Automata Networks in Computer Science: Theory and Applications*, Non-Linear Science Series, Manchester University Press,

Goles, E., Martinez, S. (1990). *Neural and Automata Networks, Dynamical Behavior and Applications*. Kluwer,.

Gutenberg, B., and. Richter, C.F. (1956). *Ann. Geophys.*, Vol. 9, N° 1,.

Hernández, G., Herrmann, H.J. (1995). "Discrete Models for Two- and Three-Dimensional Fragmentation", *Physica A*, Vol. 215, pp. 420-430,.

Hernández, G. "Node activity, Avalanches and Critical States on the Olami-Feder-Christiensen Earthquake Model", (1998). *Proceedings of High Performance Computing 1998 Conference*, Boston, USA, December.

Hernández, G. (2001). "Discrete Models for Fragmentation with Random Stopping", accepted for publication. *Physica A*, March

Hopfield, J.H., (1982). "Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities", *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.*, 79, pp. 2554 - 2558,

Hwang, K., (1993) .Advanced Computer Architecture. McGraw-Hill Series in Computer Science, New York,

Kauffman, S.A., (1984). "Emergent Properties in Random Complex Automata", *Physica 10D*, pp. 145 - 156,

Maneville, P., Boccara, N., Vichniac, G.Y., Bidaux, R. eds. (1990). "Cellular Automata and Modelling of Complex Physical Systems", *Springer Proceedings in Physics 46*, Berlin, Springer.

MPI Forum. (1994). "MPI: A Message-Passing Interface Standard", *International Journal of Supercomputer Applications*, V. 8 (3/4), pp. 165 - 416,

Olami, Z., Feder, H.J.S., Cristiensen, K (1992). "Self-Organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modelling earthquakes", *Physical Review Letters*, vol. 68, n° 8, 1992.

Pacheco, J.F., Scholz, C.H., Sykes, L.R. (1980) Changes in Frequency-Size Relations from Small to Large Earthquakes (to be published),

Pennington, R.L., (1995). .Distributed and Heterogeneous Supercomputing, Pittsburgh Supercomputing Center,

Rumelhart, D.E., Mc Clelland, J.C. eds, (1986). .Parallel and Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition. MIT Press,

Vichniac, G.Y., (1984). "Simulating Physics with Cellular Automata", *Physica 10D*, pp. 99 - 116,

Wolfram, S., (1986). Theory and Applications of Cellular Automata, World Scientific,.